④

Théorème de Weierstrass

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues nulles en dehors d'un compact.

Lemme Soit $(f_n)_n$ une approximation de l'identité et soit $f \in \mathcal{E}$.
Alors $(f_n * f)_n$ converge uniformément vers f.

On a : $f \in L^\infty$ et $(f_n)_n \subset L^1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n * f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Comme f est nulle en dehors d'un compact, en particulier f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, on a alors :

il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Par définition de l'approximation de l'identité, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{|x| \geq \alpha} |f_n(x)|\, dx = 0$, on obtient alors :

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $\int_{|x| \geq \eta} |f_n(x)|\, dx \leq \varepsilon$.

On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(y) f(x-y)\, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(y) [f(x-y) - f(x)]\, dy \right| && \text{par déf° de l'approximation de l'identité, } \textstyle\int f_n = 1 \\
&\leq \int_{|y| \geq \eta} |f_n(y)||f(x-y) - f(x)|\, dy + \int_{|y| \leq \eta} |f_n(y)||f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&\leq 2M\varepsilon + \varepsilon && \text{où } M = \|f\|_\infty < +\infty
\end{aligned}$$

Donc $(f_n * f)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Lemme On considère $(p_n)_n$ l'approximation de l'identité définie par : $p_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{|t| \leq 1}$ où $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt$.
Soit $f \in \mathcal{E}$ nulle en dehors de $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * p_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
f * p_n(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(y) p_n(x-y)\, dy \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(y) \frac{(1-(x-y)^2)^n}{a_n}\, dy \\
&:= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^{2n} q_k(y) x^k\, dy && \text{grâce au binôme de Newton} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(y)\, dy \right) x^k && \text{la somme est finie donc l'interversion autorisée}
\end{aligned}$$

Donc : $f * p_n$ est une fonction polynomiale.

Théorème de Weierstrass Soient J un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Alors il existe $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f.

On note $J = [a, b]$ et on prolonge f de telle sorte que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a-1, b+1]$ et f est affine sur $[a-1, a]$ et sur $[b, b+1]$. Alors f s'annule sur $\mathbb{R} \setminus \underbrace{[a-1, b+1]}_{K}$ donc $f \in \mathcal{E}$.
Or il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ vérifie $h\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = K$.
Alors $f \circ h$ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et est continue, ainsi en appliquant les lemmes précédents, il existe $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers $f \circ h$.
Ainsi, en considérant pour tout n, $Q_n : x \mapsto P_n\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)$, Q_n est bien une fonction polynomiale sur K qui converge uniformément vers f sur K donc sur J.